

Физическое образование в вузах
Т. 16, №4, 2010

Содержание

- 3 Президенту России Д.А. Медведеву
5 Нужна ли в России физика инженеру?
А.Д. Гладун, Г.Г. Спирин
- 11 Квантовая механика и оптика:
I. Математическое обоснование оптических аналогий некоторых квантовых явлений
С.В. Гапоненко, С.В. Жуковский, В.Н. Хильманович
- 26 Метод виртуальных проектов при изучении основ квантовой механики
в техническом университете
А.В. Баранов
- 35 Нормирование макроскопического электрического заряда
П.М. Меднис
- 45 Изучение свойств магнетиков при помощи метода Монте-Карло
С.А. Безносиков, А.М. Толстик
- 53 О методах определения параметров электрической цепи, используемых в лабораторном
практикуме «Электричество» НИЯУ МИФИ
Е.Н. Аксенова, Н.Н. Взоров, А.Н. Долгов, Е.Е. Земсков, В.Н. Игнатов,
Н.П. Калашников, К.А. Липатов, Ю.Д. Лысак, А.Ю. Матрончик, Б.Н. Мещерин,
С.В. Облизина, М.В. Пентегова, В.Д. Попов, Е.П. Потанин, В.И. Ростокин,
В.В. Самедов, Т.А. Семенова, В.Б. Соколов, В.Ф. Федоров, А.В. Шутов
- 58 Разработка трехмерного компьютерного практикума по физике для обучения студентов
технических вузов с использованием Интернет-технологий
О.Н. Третьякова
- 75 Вопросы модернизации физического практикума с учетом требований компетентностного
подхода
О.В. Плотникова, В.К. Суханова
- 82 Изучение магнитного поля Земли в новом лабораторном практикуме кафедры физики
МИСиС. Часть 1. Теория и экспериментальная установка
С.М. Курашев
- 93 Формирование интеллектуальной компетентности будущих военных авиационных
инженеров в процессе обучения физике
О.В. Вдовиченко
- 103 Актуальные проблемы преподавания естественнонаучных дисциплин в условиях
открытого образования
Н.В. Калачев, А.Н. Ланских
- 109 Аннотации
115 Реклама

Том 16, номер 4, 2010

ISSN 1609 - 3143

Физическое образование в вузах

Издательский Дом Московского Физического общества

том 16, номер 4 (2010)

Физическое образование в вузах

Редколлегия журнала «Физическое образование в вузах»

Совет журнала

Крохин Олег Николаевич — главный редактор, академик РАН, проф. НИЯУ МИФИ, доктор физико-математических наук, руководитель отделения квантовой радиофизики ФИАН

Гладун Анатолий Деомидович — заместитель главного редактора, зав. каф. МФТИ (ГУ), проф., доктор физико-математических наук

Николаев Владимир Иванович — заместитель главного редактора, проф. МГУ им. М.В. Ломоносова, директор ЦППК при МГУ, доктор физико-математических наук

Суханов Александр Дмитриевич — заместитель главного редактора, проф. РУДН, директор Центра естественно-научного образования Минобрнауки РФ при РУДН, доктор физико-математических наук

Шапочкин Михаил Борисович — заместитель главного редактора, председатель Правления МФО, проф., доктор физико-математических наук

Колесников Юрий Леонидович — проректор СПбГУ ИТМО, проф., доктор физико-математических наук

Кудрявцев Николай Николаевич — ректор МФТИ (ГУ), член-корреспондент РАН, проф., доктор физико-математических наук

Трухин Владимир Ильич — декан физфака МГУ им. М.В. Ломоносова, проф., доктор физико-математических наук

Редакционная коллегия

Ответственный секретарь

Калачев Николай Валентинович — старший научный сотрудник отдела ученого секретаря ФИАН, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана и Финансового университета, кандидат физико-математических наук

Гороховатский Юрий Андреевич — зав. каф. РГПУ им. А.И. Герцена, проф., доктор физико-математических наук

Завестовская Ирина Николаевна — зам. декана Спецфака МИФИ, доц., кандидат физико-математических наук

Калашников Николай Павлович — зав. каф. НИЯУ МИФИ, проф., доктор физико-математических наук

Лебедев Владимир Сергеевич — зав. каф. МФТИ (ГУ), проф., доктор физико-математических наук

Лебедев Юрий Анатольевич — зам. Председателя Правления Объединенного физического общества РФ, доктор физико-математических наук

Песоцкий Юрий Сергеевич — ген. директор ООО «Марпут», проф., доктор педагогических наук

Пурышева Наталья Сергеевна — зав. каф. МПГУ, проф., доктор педагогических наук

Салеский Александр Михайлович — зав. каф. МГУ им. М.В. Ломоносова, проф., доктор физико-математических наук

Спирин Геннадий Георгиевич — зав. каф. МАИ (ГТУ), проф., доктор физико-математических наук

Рудой Юрий Григорьевич — проф. РУДН, доктор физико-математических наук

Чернышев Виктор Викторович — зав. каф. ВА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, проф., кандидат технических наук

Техническая редакция

Березин Павел Дмитриевич — руководитель РИИС ФИАН.

Алексеева Татьяна Валерьевна — инженер РИИС ФИАН.

Алексеева Татьяна Викторовна — редактор РИИС ФИАН.

Physics in Higher Education

V. 16, № 4, 2010

The contents

- 3 To the President of Russia D.A. Medvedev
5 Is Necessary in Russia Physics for Engineer?
A.D. Gladun, G.G. Spirin
11 Quantum Mechanics and Optics: I. Mathematical Background of Optical Analogies to Certain Quantum Phenomena
S.V. Gaponenko, S.V. Zhukovsky, V.N. Khilmanovich
26 Virtual Projects Method in the Basics of Quantum Mechanics at the Technical University Study
A.V. Baranov
35 The Normalization of the Macroscopic Electric Charge
P.M. Mednis
45 The Study of the Properties of Magnetism by Monte-Carlo Method
S.A. Besnosikov, A.M. Tolstik
53 Methods of Determining Electrical Network Parameters Used in «Electricity» Laboratory Workshop in National Research Nuclear University «MEPHI»
E.N. Aksenova, N.N. Vzorov, A.N. Dolgov, E.E. Zemskov, V.N. Ignatov, N.P. Kalashnikov, K.A. Lipatov, Yu.D. Lysak, A.Yu. Matronchik, B.N. Mesherin, S.V. Oblizina, M.V. Pentegova, V.D. Popov, E.P. Potanin, V.I. Rostokin, V.V. Samedov, T.A. Semenova, V.B. Sokolov, V.F. Fedorov, A.V. Shutov
58 3-D Computer Physical Practical Work Development for the Education Technical University Students by Using Internet-Technology
O.N. Tretiyakova
75 Issues of Practical Physics Modernization in Accordance with the Requirements of the Competency Building Approach
O.V. Plotnykova, V.K. Suhanova
82 Studying Earth's Magnetic Field in the New Laboratory Workshop of Department of Physics MISIS. Part 1. Theory and experimental equipment
S.M. Kurashev
93 Intellectual Competence Organization of Future Military Air Engineers in the Process of Physics Education
Olga Vdovichenko
103 The Vital Problems of the Teaching of Natural-Science Disciplines under the Conditions for the Open Education
N.V. Kalachev, A.N. Lansikh
109 Abstracts
115 Information

Квантовая механика и оптика: I. Математическое обоснование оптических аналогий некоторых квантовых явлений

Сергей Васильевич Гапоненко¹,
Сергей Владимирович Жуковский²,
Валентина Николаевна Хильманович³

¹ Институт физики им. Степанова НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь, 220072,
пр. Независимости 68, e-mail: s.gaponenko@ifanbel.bas-net.by

² Институт физики им. Степанова НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь

³ Гродненский государственный медицинский университет,
г. Гродно, Беларусь, e-mail: valentina-gr@yandex.ru

Рассматриваются оптические аналогии ряда задач квантовой механики, обусловленные изоморфизмом уравнений Шредингера и Гельмгольца. Приводятся к одинаковому виду формулы квантовой механики и волновой оптики для распространения, отражения, прохождения и туннелирования квантовых частиц и электромагнитных волн.

Ключевые слова: оптические аналогии; волновая оптика; квантовая механика; изоморфизм уравнений Шредингера и Гельмгольца; туннелирование.

1. Введение

Процесс преподавания основ квантовой механики в высшей школе отличается определенными особенностями. Именно этот раздел физики традиционно считается “ненаглядным” и наиболее трудным в процессе восприятия студентами. Основная причина этих трудностей заключается в кажущемся отсутствии простых и интуитивно понятных образных представлений для квантовомеханических объектов и явлений. Нам представляется более адекватной и эффективной методика преподавания основ квантовой механики, в которой четко отмечается отсутствие прямых макро-аналогов корпускулярно-волнового дуализма и одновременно всячески подчеркивается близость волновых явлений квантовой механики к классическим волновым явлениям, среди которых наиболее наглядными кажутся оптические волновые явления. Использование оптических аналогий при обсуждении квантовых волновых явлений уместно и полезно еще и потому, что сама история зарождения волновой механики связана с использованием оптических и оптико-механических аналогий. Отдельные аспекты квантово-оптических аналогий рассматривались в наших работах [1–4]. В настоящем цикле из трех статей предлагается систематическое изложение практической методики применения оптических аналогий в преподавании основ квантовой механики в виде

набора физико-математических аналогий, историко-научного анализа влияния волновой оптики на зарождение квантовой механики, а затем обратное воздействие квантовой механики на современную нано-оптику и нанофотонику, а также результаты применения данной методики в Гродненском государственном университете им. Янки Купалы.

В данной работе мы подробнее остановимся на указанной математической связи и покажем, что в основе всех рассмотренных аналогий между волновой оптикой и квантовой (волновой) механикой лежат три явления: отражение волн на скачках потенциала (или показателя преломления), существование неоднородных волн и туннелирование в так называемых «запрещенных» областях, а также интерференция волн, рассеянных на скачках показателя преломления или потенциала. В рассмотрении мы ограничимся одномерным случаем, в котором наиболее просто демонстрируются базовые волновые эффекты в микромире.

2. Основные уравнения

Математической основой всех рассматриваемых аналогий является математическая эквивалентность одночастичного уравнения Шредингера,

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + [E - U(\mathbf{r})] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

описывающего стационарные состояния квантовой частицы, и уравнения Гельмгольца, описывающего электромагнитную волну,

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) + \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \omega^2 A(\mathbf{r}) = 0. \quad (2)$$

В этих уравнениях $\psi(\mathbf{r})$ – волновая функция частицы, $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса частицы, $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия, E – стационарные значения энергии частицы, $A(\mathbf{r})$ соответствует абсолютному значению напряженности электрического $\mathbf{E}$ или магнитного $\mathbf{H}$ полей, c – скорость света в вакууме, ω – частота электромагнитной волны, n – показатель преломления среды.

Уравнения (1), (2) могут быть представлены в единой форме

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) + k_{EM}^2 A(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k_{QM}^2 \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где введены волновые числа электромагнитной волны k_{EM} и квантовой частицы k_{QM}

$$k_{EM}^2 = \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \omega^2, \quad k_{QM}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\mathbf{r})]. \quad (4)$$

Совпадение по форме уравнений (3) часто формулируется как изоморфизм уравнений Шредингера и Гельмгольца. Однако традиционно обозначение «уравнение Гельмгольца» сохраняют для описания классических волн (не только электромагнитных, но и, например, акустических), тогда как термин «уравнение Шредингера» применяют только для квантовых объектов. Этим подчеркивается, что эти уравнения описывают разные объекты и относятся к разным разделам физики. Цель дальнейшего рассмотрения заключается в том, чтобы проследить физические аналогии в волновой оптике и волновой механике. В одномерном случае уравнения (3) принимают вид:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k_{EM}^2 A(x) = 0, \quad \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k_{QM}^2 \psi(x) = 0 \quad (5)$$

Уравнения (5) указывают на то, что изменения показателя преломления в пространстве может привести к таким же результатам, как изменения потенциала в пространстве, более точно – величины $E - U(x)$.

3. Потенциальная ступенька

Рассмотрим частицу с энергией E , движущуюся над потенциальной ступенькой, т.е. скачком потенциала U_0 в точке $x = 0$ (рис. 1).

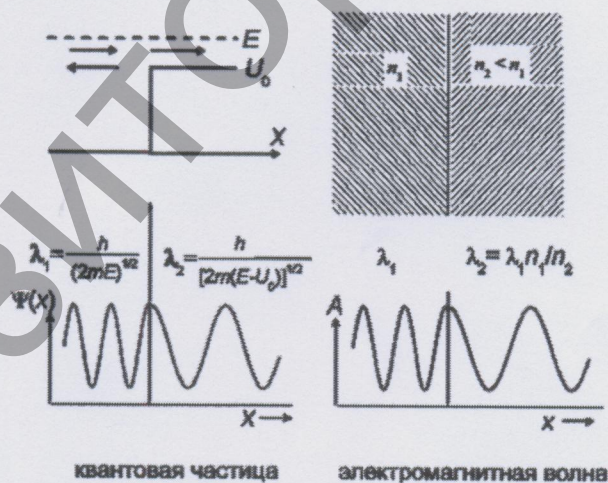


Рисунок 1. Движение квантовой частицы (слева) и электромагнитной волны (справа) над ступенькой потенциала и показателя преломления, соответственно. В обоих случаях имеется частичное отражение и изменение длины волны. Ступенька «вверх» в квантовой механике соответствует ступеньке «вниз» в оптике. На графиках не учтено изменение амплитуды при прохождении и отражении.

Предполагается, что частица встречает потенциальную ступеньку, двигаясь слева направо вдоль оси x . Для $x < 0$ рассматриваем волны, движущиеся в прямом и обратном направлениях, а для $x > 0$ – только волну в прямом направлении. Решение уравнения имеют вид

$$\psi_I(x) = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x) \quad \text{для } x < 0 \quad (6)$$

$$\psi_{II}(x) = C \exp(ik_2 x) \quad \text{для } x > 0, \quad (7)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar} \quad (8)$$

– волновые числа частицы перед и за ступенькой, соответственно. Сразу можно заметить, что последнее соотношение означает изменение длины волны де Бройля частицы при пересечении ступеньки от значения λ_1 к λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U_0)}}. \quad (9)$$

Коэффициенты отражения r и прохождения t для амплитуд волновых функций имеют вид

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (10)$$

Используя (8), можно выразить r, t через два параметра задачи, а именно, полную энергию E , и высоту ступеньки U_0

$$r = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}}, \quad t = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}}. \quad (11)$$

Для получения полных вероятностей, которые дают отношение потоков прошедших и отраженных частиц (в предположении, что частицы между собой не взаимодействуют, поведение каждой частицы можно рассматривать как независимый эксперимент), необходимо найти $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x)$.

В результате приходим к соотношениям для коэффициента отражения и коэффициента прохождения для потока частиц:

$$R = r^2 = \frac{(\sqrt{E} - \sqrt{E-U_0})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0})^2}, \quad T = 1 - R = \frac{4\sqrt{E(E-U_0)}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0})^2}. \quad (12)$$

Аналогичным образом, можно рассмотреть классическую, например, электромагнитную волну с частотой ω , волновым числом k_1 , длиной волны λ_1 , которая распространяется в среде со ступенькой показателя преломления от n_1 до $n_2 < n_1$. Математическая идентичность уравнений (5) приводит к выражениям, аналогичным (10) с изменением волнового числа и длины волны, а также с частичным прохождением и отражением волны при неизменной частоте, а коэффициенты отражения и прохождения для амплитуды выражаются так же, как и в выражениях (10).

В оптике выражения для коэффициентов отражения и прохождения записываются обычно через показатели преломления. Коэффициенты отражения и прохождения для амплитуды имеют вид.

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (13)$$

Переход к коэффициентам отражения и прохождения для интенсивности осуществляется следующим образом:

$$R = r^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (14)$$

Эти выражения симметричны относительно перестановки $n_1 \leftrightarrow n_2$. Покажем, что выражения (12) совпадают с соответствующими выражениями в оптике (14), а формулы (13) – с формулами (10). Для этого введем относительный показатель преломления в квантовой механике. Для электромагнитной волны относительный показатель преломления определяется как отношение скоростей частицы в разных средах v_1, v_2 , т.е.

$$n_{EM} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (15)$$

Аналогичным образом можно ввести показатель в квантовой механике:

$$n_{QM} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{E - U_0}{E}}. \quad (16)$$

Отметим, однако, что потенциальная ступенька «вверх» в квантовой механике соответствует ступеньке преломления «вниз» в оптике. Эта асимметрия происходит вследствие того, что в оптике скорость волны обратно пропорциональна волновому числу, а в волновой механике скорость частицы прямо пропорциональна волновому числу. Примечательно, что эта асимметрия не влияет на формулы для R и T , так как эти формулы содержат функции n , инвариантные по отношению к подстановке $n \rightarrow 1/n$.

С введенными обозначениями квантовомеханические коэффициенты отражения и прохождения принимают вид:

$$R_{QM} = \frac{(1 - n_{QM})^2}{(1 + n_{QM})^2}, T_{QM} = \frac{4n_{QM}}{(1 + n_{QM})^2} \quad (17)$$

что полностью совпадает с соответствующими выражениями в оптике

$$R_{EM} = \frac{(1 - n_{EM})^2}{(1 + n_{EM})^2}, T_{EM} = \frac{4n_{EM}}{(1 + n_{EM})^2} \quad (18)$$

Для очень высоких значений $n \gg 1$, а также для очень низких значений $n \ll 1$ коэффициент отражения стремится к единице, а коэффициент прохождения – к нулю.

4. Потенциальный барьер и яма

Рассмотрим квантовую частицу, движущуюся над потенциальным барьером или ямой шириной a , и сравним результаты с распространением электромагнитной волны сквозь диэлектрический слой, имеющий показатель преломления n_2 , отличающийся от показателя преломления окружающей среды n_1 .

Движение квантовой частицы описывается уравнением Шредингера для потенциального барьера $U(x)$. Ход решения аналогичен рассмотренному в предыдущем разделе в формулах (6)-(11) с тем усложнением, что волновая функция записывается в трех областях (перед барьером, над барьером и за барьером), а условия непрерывности и гладкости волновой функции записываются в точках $x = 0$ и $x = a$. Решение этой задачи можно найти во многих учебниках по квантовой механике, поэтому приведем сразу окончательный результат:

$$R = \frac{(k_1^2 - k_2^2) \sin^2(ak_2)}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(ak_2) + 4k_1^2 k_2^2}, T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(ak_2) + 4k_1^2 k_2^2} \quad (19)$$

Используя обозначения (8) и относительный показатель преломления (16), получим

$$R = \frac{(1 - n_{QM}^2)^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mEn_{QM}}\right)}{(1 - n_{QM}^2)^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mEn_{QM}}\right) + 4n_{QM}^2},$$

$$T = \frac{4n_{QM}^2}{(1 - n_{QM}^2)^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mEn_{QM}}\right) + 4n_{QM}^2} \quad (20)$$

Аргумент синуса в выражениях (19)-(20) имеет ясный физический смысл: это умноженное на $2A$ отношение ширины барьера к дебройлевской длине волны частицы над барьером, т.е. $2\pi a / \lambda_2 = 2\pi a n_{QM} / \lambda_1$. Мы пришли к эффекту, который обычно обсуждается как нетривиальный во многих задачниках по квантовой механике. Когда аргумент синуса в выражениях (19)-(20) кратен A , коэффициент прохождения T равен единице, а коэффициент отражения R равен нулю. Если длина волны над барьером удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda_2^{(N)}}{2} N = a, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

или, что то же самое, длина волны частицы вне барьера удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda_1^{(N)}}{2} N = a n_{QM}, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (21')$$

поток частиц проходит над барьером без отражения. Условие (21) означает, что на ширине барьера должно укладываться целое число полуволн. Соответствующий набор резонансных значений энергии определяется выражением

$$E_N - U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} N^2, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Легко видеть, что правая часть этого выражения совпадает с набором энергетических уровней частицы в яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Это связано с тем, что спектр частицы в бесконечно глубокой яме тоже определяется условием образования стоячих волн в яме.

Условие (21) совпадает с простым и очевидным условием появления резонансных мод Фабри-Перо для света, распространяющегося сквозь тонкую диэлектрическую пленку или пластинку. Это означает, что безотражательное прохождение в квантовой механике имеет резонансную природу и возникает вследствие конструктивной интерференции волн, отраженных от потенциальных ступенек. Волновая функция для резонансных значений энергий E_n «накапливается» над барьером так же, как световая волна в резонаторе. Применительно к единичной частице можно сказать, что частица с большей вероятностью может быть найдена над барьером, чем вне его, если ее энергия принадлежит набору E_n . Эта вероятность растет пропорционально относительной высоте барьера $(E - U_0)/E$, равной n_{QM}^2 , в соответствии с введенным обозначением (16).

На основе результатов для потенциального барьера можно сразу записать коэффициенты отражения и прохождения для потенциальной ямы, так как ясно, что

выражения (17)-(19) в равной степени справедливы и для барьера, и для ямы. Выражения (20) с формальными подстановками $E \rightarrow E - U_0$, $E - U_0 \rightarrow E$ принимают вид:

$$\begin{aligned} R &= \frac{U_0^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mE}\right)}{U_0^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mE}\right) + 4E(E - U_0)}, \\ T &= \frac{4E(E - U_0)}{U_0^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{mE}\right) + 4E(E - U_0)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Набор резонансных значений энергии, обеспечивающих безотражательное прохождение над ямой, строго совпадает с энергетическим спектром частицы в бесконечно глубокой яме такой же ширины

$$E_N = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} N^2, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Однако, в отличие потенциального барьера, для ямы это условие является необходимым, но не достаточным. Резонансное прохождение имеет место только при дополнительном условии $E_N > U_0$, т.е. лишь для тех значений энергии, для которых частица не «заперта» в яме, а ее движение инфинитно. Из-за этого дополнительного условия спектр резонансного прохождения над ямой всегда будет более разреженным, чем над барьером при тех же значениях a и U_0 .

Если рассмотреть теперь распространение электромагнитной волны сквозь плоскопараллельную диэлектрическую пластинку толщиной a с показателем преломления $n_2 \neq n_1$, отличающимся от показателя преломления окружающей среды n_1 , где обе грани пластинки представляют собой скачок показателя преломления, каждый из которых вызывает частичное отражение падающей волны, и решить задачу об интерференции этих волн как, например, это сделано в [5], можно получить выражения для коэффициентов отражения и пропускания для такого слоя, известные как формулы Эйри. Такие же выражения получаются при решении задачи с использованием соответствующих условий непрерывности на границах раздела (см., напр. [1, 6]). Выражение для коэффициента пропускания имеет вид

$$T_{EM} = \left[1 + \frac{(n_{EM}^2 - 1)^2}{4n_{EM}^2} \sin^2(k_2 a) \right]^{-1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2. \quad (25)$$

Индекс «ЕМ» подчеркивает, что рассматриваются электромагнитные волны. Это

выражение совпадает с результатами квантовомеханической задачи: (20) можно переписать в виде

$$T_{QM} = [1 + \frac{(1 - n_{QM}^2)^2}{4n_{QM}^2} \sin^2(k_2 a)]^{-1}, \quad \text{где } n_{QM}^2 = (E - U_0)/E, \quad (26)$$

что полностью совпадает с (25). Аналогичное соответствие можно продемонстрировать для коэффициентов отражения.

Таким образом, безотражательное распространение классических волн и квантовых частиц над ямами и барьерами объясняется интерференцией волн. Отметим еще одну особенность для прохождения частиц и волн. Полная прозрачность барьера достигается за счет «накопления» волновой функции над барьером. Полная прозрачность диэлектрического слоя также достигается за счет накопления поля в слое. Такое поведение может быть описано как появление ненулевой добротности. Добротность, как известно, является общей характеристикой колебательных систем в механике, акустике, электричестве и оптике.

Таблица 1

Волновая оптика в сравнении с квантовой механикой.

Движение в однородной среде над потенциальной ступенькой, барьером или ямой

	Квантовая механика	Волновая оптика
Функция	Волновая функция $\psi(x)$	Электрическое поле $A(x)$
Однородная среда	Потенциал U_0	Показатель преломления n
Инфинитное движение	Волновое число $k_{QM} = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$, Скорость $v = \hbar k/m = n_{QM} \sqrt{2E/m}$	Волновое число $k_{EM} = \omega/c$, Скорость $v = \omega/k = c/n$
Закон дисперсии в вакууме	$E = \hbar^2 k^2 / 2m$	$\omega = ck$
Основное уравнение	$\psi''(x) + k_{QM}^2 \psi(x) = 0$	$A''(x) + k_{EM}^2 A(x) = 0$
Относительный показатель преломления	$n_{QM} = v_2/v_1 = k_2/k_1 = \sqrt{(E - U_0)/E}$	$n_{EM} = v_2/v_1 = n_1/n_2 = k_1/k_2$
Закон дисперсии в однородной среде	$E = \hbar^2 k^2 n_{QM}^2 (2m)^{-1}$	$\omega = ck/n$
Ступенька потенциала или показателя преломления	$R_{QM} = \frac{(1 - n_{QM})^2}{(1 + n_{QM})^2}$, $T_{QM} = \frac{4n_{QM}}{(1 + n_{QM})^2}$	$R_{EM} = \frac{(1 - n_{EM})^2}{(1 + n_{EM})^2}$, $T_{EM} = \frac{4n_{EM}}{(1 + n_{EM})^2}$
Потенциальный (рефрактивный) барьер (яма)	$T_{QM} = \left[1 + \frac{(1 - n_{QM}^2)^2}{4n_{QM}^2} \sin^2(k_2 a) \right]^{-1}$ $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$	$T_{EM} = \left[1 + \frac{(n_{EM}^2 - 1)^2}{4n_{EM}^2} \sin^2(k_2 a) \right]^{-1}$ $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$

Наконец, подчеркнем, что физические аналогии в волновой механике и волновой оптике (отражение, прохождение, резонансные условия) не зависят от введения показателя преломления. Введение показателя преломления в квантовую механику и его использование в формулах для коэффициента отражения от потенциальной ступеньки, по-видимому, впервые выполнено А. Зоммерфельдом [7] и позднее использовалось Д.И. Блохинцевым [8], а также авторами учебного пособия [9]. Введение n_{QM} использовано нами для того, чтобы показать полное совпадение квантовых и классических формул. Эти формулы сведены в таблицу 1.

5. Туннелирование сквозь потенциальный барьер конечной ширины

Рассмотрим теперь процесс туннелирования частицы сквозь потенциальный барьер конечной высоты и ширины, имеющий место, если энергия частицы меньше высоты потенциального барьера (рис. 2). Слева от барьера имеются падающая и отраженная волны, внутри барьера волновая функция экспоненциально затухает, а справа от барьера имеем волну, амплитуда которой задается параметрами барьера и начальной амплитудой на входе в барьер.

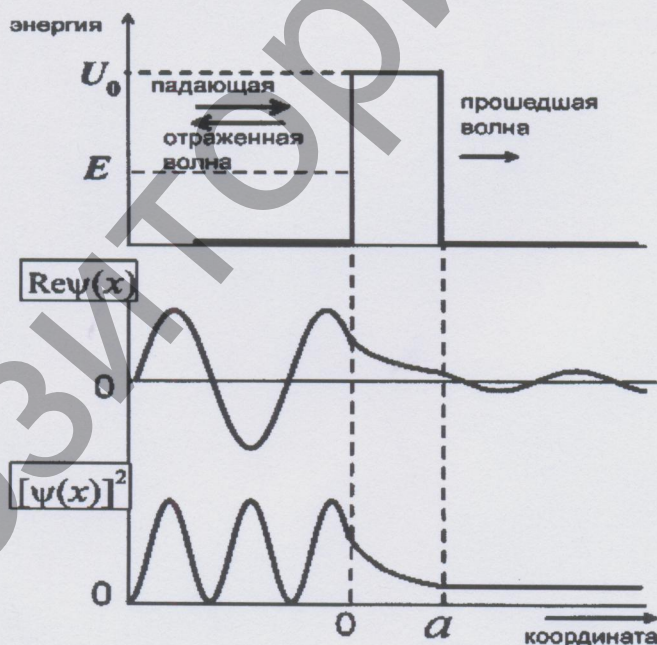


Рисунок 2. Прямоугольный потенциальный барьер (вверху), волновая функция частицы (в середине) и плотность вероятности (внизу) для случая, когда энергия частицы меньше высоты барьера.

Плотность вероятности осциллирует слева от барьера вследствие интерференции падающей и отраженной волн и принимает постоянное значение за барьером. Опуская громоздкие вычисления, приведем конечное выражение для коэффициента прозрачности барьера по отношению к плотности вероятности, используем обозначения k и κ (см., напр., [10]). Как и ранее, используем волновое число $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, и вводим величину $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$, которая не является волновым числом, так как, в отличие от случая $E > U_0$, в рассматриваемом случае прошедшая волна отсутствует. Получаем:

$$T_{QM} = \left[1 + \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)} \sinh^2(\kappa a) \right]^{-1} > 0, \quad (27)$$

а для коэффициента отражения

$$R_{QM} = 1 - T_{QM} = \left[1 + \frac{4E(U_0 - E)}{U_0^2} \sinh^2(\kappa a) \right]^{-1} < 1. \quad (28)$$

Здесь $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ – гиперболический синус. Введенное ранее определение относительного показателя преломления в квантовой механике будем формально использовать в виде, который соответствует нашему случаю:

$$n_{QM}^2 = \frac{E - U_0}{E} = 1 - \frac{U_0}{E} < 0, \quad (29)$$

Для $\kappa a \gg 1$, $\sinh(\kappa a) = \frac{e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}}{2} \approx e^{\kappa a}/2$ примерно равен $e^{\kappa a}/2$ и используя n_{QM} в виде (29) выражение (27) может быть записано в упрощенной форме:

$$T_{QM} = \left[1 - \frac{1}{4} (1 - n_{QM}^2) \left(1 - \frac{1}{n_{QM}^2} \right) \sinh^2(\kappa a) \right]^{-1}, \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (30)$$

Прямым электромагнитным аналогом туннелирования является прохождение электромагнитной волны сквозь тонкую металлическую пластинку. В диэлектриках всегда имеем $n^2 = \mu > 0$, где μ – диэлектрическая проницаемость. Для металлов диэлектрическая функция отрицательна в области частот, меньших т.н. плазменной частоты. Для большинства распространенных металлов плазменная частота соответствует ультрафиолетовому излучению. Поэтому прохождение электромагнитной волны оптического диапазона сквозь металлическую пластинку (рис. 3) во многом воспроизводит туннелирование квантовой частицы сквозь потенциальный барьер.

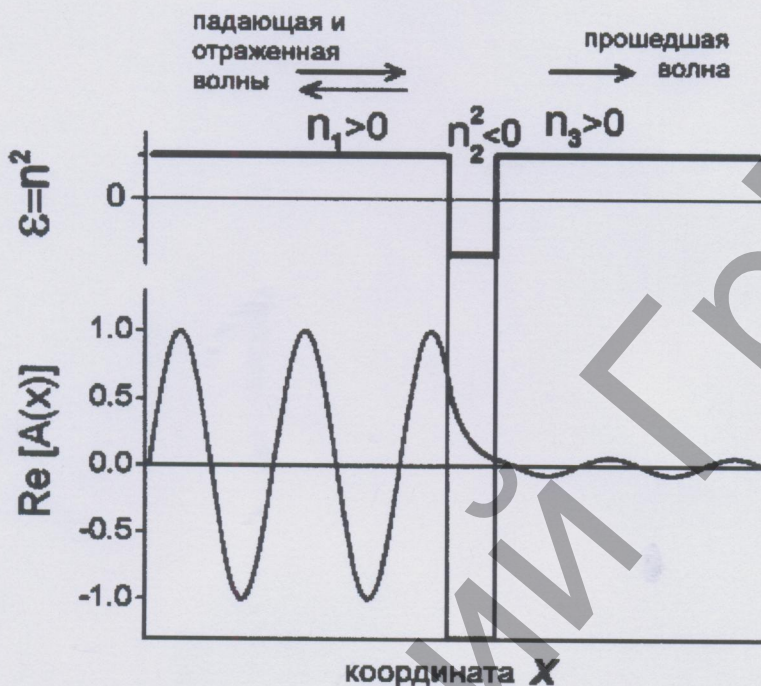


Рисунок 3. Прохождение электромагнитной волны сквозь слой вещества с отрицательной диэлектрической проницаемостью.

Используя аналогию электродинамической и квантовомеханической задач, на основании (30) можно сразу записать выражение для коэффициента пропускания в оптике:

$$T_{EM} = \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 - n_{EM}^2 \right) \left(1 - \frac{1}{n_{EM}^2} \right) \sinh^2(\kappa_{EM} a) \right]^{-1}, \quad (31)$$

Причем, как и в квантовой механике, при $\kappa_{EM} a \gg 1$ последнее выражение упрощается

$$T_{EM} \approx \frac{1}{4} \left(1 - n_{EM}^2 \right) \left(1 - \frac{1}{n_{EM}^2} \right) \exp(-\kappa_{EM} a), \quad \text{для } \kappa_{EM} a \gg 1. \quad (32)$$

Таким образом, прохождение электромагнитной волны сквозь металлическую пленку воспроизводит основные закономерности квантовомеханического туннелирования.

В таблице 2 приведены основные обозначения, формулы и эффекты при туннелировании в волновой механике и в волновой оптике. Отметим, что существует еще один хорошо известный случай в волновой оптике, когда наблюдается экспоненциальное затухание поля и туннелирование. Это – нарушенное полное

внутреннее отражение, что обсуждалось в [1,2,3]. В работах [4,8] содержится применение оптической аналогии к эффекту Рамзауэра-Таунсенда – резкому снижению вероятности рассеяния электрона на простых атомах при определенных значениях его энергии. Аналогия состоит в безотражательном распространении излучения в условиях конструктивной интерференции рассеянных волн.

Таблица 2

Волновая оптика в сравнении с волновой механикой: туннелирование

	Квантовая механика	Волновая оптика
Функция	Волновая функция $\psi(x)$	Электрическое поле $A(x)$
Основное уравнение	$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0$	$A''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) A(x) = 0$
Параметр среды	Потенциал $U(x)$	Диэлектрическая функция $\varepsilon(x)$ Показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ для непоглощающих сред
Затухание и туннелирование	$E < U(x)$, $\psi(x) = C \exp(-\kappa_{QM} x)$	$\varepsilon(x) < 0$, $A(x) = C \exp(-\kappa_{EM} x)$
Показатель затухания	$\kappa_{QM} = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$, $U_0 > E$	$\kappa_{EM} = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_2}$, $\varepsilon < 0$
Относительный показатель преломления	$n_{QM}^2 = \frac{E - U_0}{E} = -\frac{\kappa^2}{k^2} < 0$	$n_{EM}^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{k^2}{\kappa^2} < 0$, $\varepsilon_2 < 0 < \varepsilon_1$
Коэффициент преломления (точная формула)	$T_{QM} = \left[1 - \frac{1}{4} (1 - n_{QM}^2) \left(1 - \frac{1}{n_{QM}^2} \right) \sinh^2(\kappa a) \right]^{-1}$	$T_{EM} = \left[1 - \frac{1}{4} (1 - n_{EM}^2) \left(1 - \frac{1}{n_{EM}^2} \right) \sinh^2(\kappa_{EM} a) \right]^{-1}$
Коэффициент прохождения для $\kappa_{EM} a \gg 1$, $\kappa_{QM} a \gg 1$	$T_{QM} \approx \frac{1}{4} (1 - n_{QM}^2) \left(1 - \frac{1}{n_{QM}^2} \right) \exp(-\kappa_{QM} a)$	$T_{EM} \approx \frac{1}{4} (1 - n_{EM}^2) \left(1 - \frac{1}{n_{EM}^2} \right) \exp(-\kappa_{EM} a)$

7. Ограничения рассмотренных аналогий

Необходимо остановиться и на расхождениях, важных для понимания границ применимости указанных аналогий, и определяющих отличия в применении волновых уравнений в электромагнитной теории излучения и в квантовой механике. В электромагнитной теории уравнение Гельмгольца задает свойства реально наблюдаемой (измеряемой) физической величины – амплитуды электрического или магнитного поля. Уравнение Шредингера задает свойства не реально наблюдаемой физической величины, а сопоставляемой квантовой частице волновой функции, квадрат модуля которой, после интегрирования по конечной области пространства определяет вероятность обнаружения частицы в этой области. Результат решения уравнения Шредингера применим к результатам большого числа экспериментов в

вероятностном смысле, хотя само уравнение Шредингера является одночастичным уравнением.

Обобщение аналогий, установленных при анализе одномерных задач, на двух- и трехмерные задачи нужно проводить с определенной осторожностью. Поперечность электромагнитных волн приводит к целому ряду поляризационных эффектов (например, двулучепреломление, поворот плоскости поляризации).

8. Выводы

Итак, можно утверждать, что существуют пары аналогичных оптических и квантовых явлений, которые являются следствиями волновой природы света и квантовых частиц. Каждая пара аналогичных эффектов связана с проявлением одного или нескольких основных явлений: отражением волны на скачках показателя преломления или потенциала, интерференции волн, существованием экспоненциального затухания волн в т. н. «классически запрещенных» областях.

Изменению высоты потенциального барьера (глубины потенциальной ямы) в квантовой механике соответствует изменение показателя преломления на границе раздела диэлектрических сред, а туннелированию квантовой частицы под барьером соответствует распространение неоднородной волны в проводящей (металлической) среде или в условиях нарушенного полного внутреннего отражения. Аналогом безотражательного прохождения квантовой частицы над потенциальным барьером (ямой) являются моды Фабри-Перо тонких диэлектрических пластинок (воздушных зазоров между пластинками).

Таким образом, в работе построена система аналогий квантовых и оптических явлений, основанная на математической эквивалентности уравнений Шредингера и Гельмгольца и анализе их решений для распространения электромагнитного излучения и движения квантовых частиц.

Построение приведенной системы аналогий не обладает научной новизной. Первичные аналогии отмечались в работах [7, 8], введение в рассмотрение других аналогий на ранних этапах развития квантовой механики будут обсуждаться в части II настоящего цикла. Построение аналогий проведено для разработки последовательной методики их применения в преподавании основ квантовой механики. Приведенные к одинаковому виду формулы квантовой механики и волновой оптики для распространения, отражения, прохождения и туннелирования квантовых частиц и электромагнитных волн демонстрируют, что аналогии между соответствующими явлениями существуют и являются математически обоснованными. Математическое и графическое сравнение, проведенное в работе, свидетельствует о целесообразности применения этих аналогий в преподавании квантовой механики в вузах.

Литература

1. Гапоненко С.В., Жуковский С.В., Хильманович В.Н. Оптические аналогии квантовых явлений: учебно-методическое пособие, Минск: РИВШ, 2009. – 88 с.
2. Гапоненко С.В. Применение метода аналогии в преподавании курса «Квантовая механика» в высшей школе / С.В. Гапоненко, В.Н. Хильманович // Высшая школа – 2008. – № 5 (67). – С. 43–47.
3. Хильманович В.Н. Оптические аналогии в квантовой механике на примере туннельного эффекта, их роль в понимании физических явлений и развитии нанотехнологий / В.Н. Хильманович, Н. Д. Стрекаль // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Фізика. Матэматыка. Інфарматыка. – 2007. – № 4 (61). – С. 50–55.
4. Хильманович В.Н. Оптические аналогии в квантовой физике: эффект Рамзауэра-Таунсенда и многолучевая интерферометрия / В.Н. Хильманович, Н.Д. Стрекаль // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізика. Інфарматыка. Вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2008. – № 3 (73). – С. 107–112.
5. Ахматов С.А. Физическая оптика / С.А. Ахматов, С.Ю. Никитин. – М: Изд-во МГУ, 2004. – 656 с.
6. Spectral scalability as a result of geometrical self-similarity in fractal multilayers / S.V. Zhukovsky, A.V. Lavrinenko, S.V. Gaponenko // Europhys. Lett. 2004. – Vol. 66. – P. 455–461.
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры Т. 2 – М., 1956. – Гл. 1. – С. 27–33.
8. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 667 с.
9. Практикум по атомной физике: учебное пособие для студентов физических и технических специальностей: в 2 ч. / С.А. Маскевич, Н.Д. Стрекаль, В.Е. Граков, А.А. Сокольский // Гродно, 1999. – Ч. 1. – 114 с.
10. Теоретическая физика: в 10 т. – М.: Наука – Т. 3: Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 1989. – 767 с.